第46卷 第4期
2023年4月

核 技 术 NUCLEAR TECHNIQUES
www.hjs.sinap.ac.cn

Vol.46, No.4
April 2023

BEST合作组QCD相图研究进展

尹 伊
（中国科学院近代物理研究所 兰州 730000）

摘要 能量扫描理论合作组（Beam Energy Scan Theory Collaboration，BEST）的目标是建立一个可以描述美国相对论重离子对撞机（Relativistic Heavy-Ion Collider，RHIC）上第二期能量扫描实验的动力学框架。该实验有可能找到强相互作用相图上的临界点。本文总结自2016年起，BEST合作组取得重要进展，并对未来探索中高密度区相图做了展望。

关键词 量子色动力学（Quantum Chromodynamics，QCD）相图，相对论重离子对撞，QCD临界点，涨落，动力学模型

中图分类号 TL99

DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040010

The BEST framework for exploring the QCD phase diagram: progress summary

YIN Yi

(*Institution of Modern Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Lanzhou 730000*, *China*)

Abstract Exploring the quantum chromodynamics (QCD) phase diagram at finite bayron density regime through the beam energy scan (BES) program at the relativistic heavy-ion collider (RHIC) is one of the key frontiers in high energy nuclear physics. The high precision data anticipated from the second phase of the BES program would potentially enable the discovery of the conjectured QCD critical point, a landmark point on the phase diagram. In this paper, the progress made by the beam energy scan theory (BEST) collaboration, which was formed with the goal of providing a theoretical framework for analyzing data from BESII, is reviewed. In addition, the challenge of investigating the QCD phase diagram with future facilities is discussed.

Key words QCD phase diagram, Relativistic heavy-ion collisions, QCD critical point, Fluctuations, Dynamical modelings

量子色动力学（Quantum Chromodynamics，QCD）是描述夸克胶子相互作用的基本理论。研究极端高温高密物质（QCD物质）属性是量子色动力学研究的重要前沿。过去20年，美国相对论重离子对撞机（Relativistic Heavy-Ion Collider，RHIC）以及欧洲大型强子对撞机（Large Hadron Collider，LHC）上的相对论重离子对撞实验，揭示了一系列QCD物质的新颖性质。比如，处在解禁闭状态下的夸克胶子等离子（Quark-gluon Plasma，QGP）被发现是一个流动性极好的近理想流体。与此同时，理论研究也不断取得重要进展，例如最新第一性原理格点QCD计算表明，在重子化学势为零时，从强子气体到QGP是平滑相变（Crossover transition），相变温度在154~158.4 MeV。这里描述的都是重子密度较低时QCD物质的属性。学科当前的重要热点是系统研究QCD物质在中高密度区的属性[1]。

图1是我们现在对QCD相图的认知。猜想中的临界点（Critical point）以及其可能存在的位置由白点表示，红色点对应不同对撞能量下火球freezeout大致在相图上的位置。图中还展示了第二

第一作者：尹伊，男，1983年出生，2014年于伊利诺斯大学芝加哥大学获博士学位，研究领域为高能核物理理论，E-mail：yiyin@impcas.ac.cn
收稿日期：2022-12-19，修回日期：2023-03-15
First author: YIN Yi, male, born in 1983, graduated from University of Illinois at Chicago with a doctoral degree in 2014, focusing on high energy nuclear physics, E-mail: yiyin@impcas.ac.cn
Received date: 2022-12-19, revised date: 2023-03-15

期能量扫描实验(Beam Energy Scan，BES-II)覆盖的相图区域。可以看到，临界点是QCD相图的地标。很多QCD模型计算都表明，随着重子密度的增加，相边界将从平滑相变过渡到不连续的一级相变。与之对应，一级相变在相图上终止的点被称作QCD临界点，但是临界点是否存在，现在还无法通过第一性原理计算。因此，寻找临界点以及一级相变的信号，是现阶段重离子对撞实验的重要目标。

2019~2021年，RHIC进行了BES-II实验，对撞模式的能量点覆盖19.6~3 GeV，大致对应重子化学势200~400 MeV。在这样一个能量区间，一系列对临界点敏感的观测量在第一期能量扫描实验中呈现出有趣的表现。由于BES-II实验数据的极高精度，该实验有潜力将以前实验得到关于临界点的线索，变成其存在的科学证据。但是，重离子对撞实验产生的火球有着复杂的动力学演化，从实验结果中提取临界点的信息，需要发展相应的理论框架。在这样一个背景下，由美国能源部资助，能量扫描理论合作组(Beam Energy Scan Theory Collaboration，BEST合作组)于2016年成立，资助期为5年。BEST合作组的主要目标是建立一个定量的动力学框架，用于描述第二期BES实验的数据，回答在BES能区是否处在临界点的问题。除此之外，这个动力学框架也可以应用于提取有限密度区QCD物质其他重要属性。

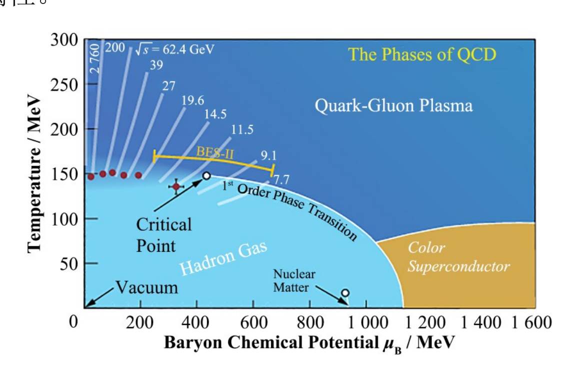


图1　QCD相图示意[2]

Fig.1　A sketch of the QCD phase diagram[2]

2016~2020年，BEST合作组在构建前述动力学框架方面取得了一系列重要进展。2020年资助期结束之后，合作组成员之间的相互合作也十分活跃，见文献[2]的总结。本文将综述BEST合作组在QCD相图研究取得的进展，以期对未来研究提供有益的参考，参看相关综述文献[3−4]。BEST合作组的另一个目标是定量研究手征磁效应(Chiral Magentic Effect，CME)。对这方面研究活动的评述不在本文的讨论范围之内，有兴趣的读者可以参考文献[5−7]。此外，重离子对撞物理近一两年部分有趣成果，可参看文献[8−9]。

对于LHC能区以及RHIC最高对撞能量，在2016年之前已经有一套基于相对论流体力学的成熟动力学框架来描述对撞产生的火球的演化。该框架用尽可能少的参数描述了一系列实验结果。把该框架拓展到BES能区，需要解决的主要问题包括：

1)初始条件：随着核核碰撞能量的降低，其初始状态会发生一系列定性的区别，比如夸克自由度占的比重将增大，而对于高能量碰撞，自由度主要是胶子。在这些碰撞中，保留在火球中的重子数也在增加，其分布对重子stopping的机理十分敏感。因此需要构建考虑了这些重要因素的初始条件模型。

2)状态方程：由于符号问题，格点计算无法提供重子密度较大时的状态方程。更为重要的是，如果临界点被BES能区覆盖，作为定量模型输入的状态方程必须包含临界点的信息。

3)流体力学：需要演化重子密度，奇异(strangeness)荷密度等自由度。

4)临界涨落的演化：临界涨落增强是临界点存在的重要标志。由于critical slowing down效应(详见§1)，临界涨落在实验条件下，必然会处在非平衡态状态，因此需要构建描述涨落演化的动力学方程，并将其与流体力学方程自洽地耦合起来。

5)临界涨落的粒子化：将序参量，或者重子数密度的涨落，定量转化成实验可观察的强子数涨落，需要构建合理的粒子化模型。

6)数据分析：贝叶斯全局分析在重离子碰撞实验中有着广泛应用。对于寻找QCD临界点和提取QCD物质有限密度下的输运性质，同样需要拓展已有的贝叶斯分析工具。

1　理论上的进展

1.1　格点QCD

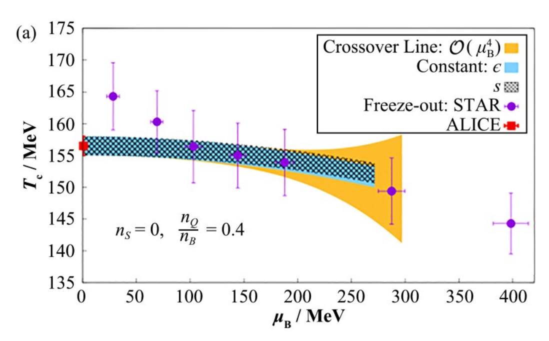
由于符号问题，格点QCD不能直接确定QCD临界点是否存在，或者其在相图上的位置。但是，由于格点可以第一性原理计算重子密度较低区域(具体而言，$\mu_B/T < 2$)的相变相关属性，其结果是寻找临界点的基石。

如果我们生活在一个夸克质量为零的世界，那么手征对称性是精确的，因此，重子密度为零时，从强子气体到QGP的相变伴随着手征对称性从破缺到还原的二级相变。在真实世界，夸克质量不为零，手征对称性只是一个近似。相应地，相变是没有鲜明分界的平滑相变，相变温度因而无法严格定义。一个自然的选择是考虑手征凝聚(chiral

condesation)的涨落(由手征凝聚 susceptibility 刻画)随温度的变化，将涨落峰值对应的温度定义为相变温度。通过泰勒展开，格点不仅可以计算$\mu_B = 0$，也可以计算μ_B/T不太大条件下的手征凝聚，进而提取相变温度。由此得到的相变温度随着重子化学势的变化，可以写成如下的形式：

$$\frac{T_c(\mu_B)}{T_0} = 1 - k_2\left(\frac{\mu_B}{T_0}\right)^2 + k_4\left(\frac{\mu_B}{T_0}\right)^4 \quad (1)$$

式中：T_0表示重子化学势($\mu_B = 0$)情形下的相变温度；k_2描述了相边界的曲率，k_2为正，说明在化学势较小的时候，相变温度随着重子密度增加而降低；k_4进一步刻画有限密度对相变温度的修正。HotQCD合作组[10]和WB合作组[11]得到的结果分别是T_0 = (156.5 ± 1.5) MeV, k_2 = 0.012(4), k_4 = 0.000(4) 和T_0 = (158.0 ± 6) MeV, k_2 = 0.015 3(18), k_4 =0.000 32 (67)，代表了这方面研究的最新进展。需要注意的是，曲率在数值上较小，四阶修正k_4几乎可以忽略，说明相边界在小密度区域可以近似地看作一条平行于化学势轴的曲线，见图2。



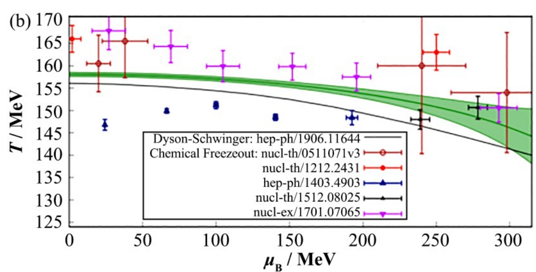


图2 格点QCD计算得到的手征相变温度随重子化学势的变化[2-3]

Fig.2 Chiral phase transition temperature *vs*. chemical potential from Lattice QCD[2-3]

除了手征凝聚随温度变化的峰值在相图上的位置，格点还可以算出该峰对应的宽度。在临界点附近，宽度会变窄，因为对应的峰会变陡峭。文献[2]研究发现，一直到化学势300 MeV，宽度几乎不随化学势变化。这个结果意味着在μ_B < 300 MeV的范围内，临界点存在的可能性非常小。

除了手征凝聚的涨落，格点还可以系统研究守恒荷的涨落，比如重子荷的涨落。这些涨落既包括高斯涨落，也包括非高斯的高阶涨落。在临界点附近，重子荷的涨落趋于发散，且非高斯涨落发散得更快。现有格点对重子荷涨落的计算[3]也进一步表明μ_B < 300 MeV的范围，临界点并不存在。尤其重要的是，在这个范围内，重子荷四阶涨落和二阶涨落的比值随化学势变化的格点结果和STAR合作组的实验结果符合得很好。虽然这个比较忽略了很多动力学的因素，但它表明了格点研究对实验研究相变可以起到指引作用。

从更广义说，热力学量的涨落由状态方程决定。格点提取有限密度状态方程的主要手段是基于在零密度附近的泰勒计算展开。格点上获取有限密度状态的进展，可以参考文献[12]。

1.2 临界涨落的演化

临界点附近序参量(the order parameter field)长波长(大尺度)下涨落会被增强，并在接近临界点时随着关联长度(ξ)的发散而趋于发散。临界增强的长波长涨落正是临界乳光现象背后的物理机理。具体到QCD临界点，序参量是手征凝聚和能量，重子密度的线性组合。因此，序参量的涨落也会引发末态强子数目(multiplicity)，比如质子数目的涨落。基于临界点附近的热力学普适行为(universality)，非高斯涨落，比如三阶矩(skewness)、四阶矩(kurtosis)对序参量关联长度的增长更加敏感。理论还预言，在临界点附近，四阶矩随化学势将展现特定的非单调行为。该非单调行为被认为是临界点存在的标志性信号[13]。此外，基于并合模型，临界涨落也可能通过测量轻核(light nuclei)的产额探寻[14-16]。

上述讨论基于热平衡条件下的临界属性。涨落和耗散定理(fluctuation- dissipation theorem)告诉我们，涨落的弛豫时间正比于涨落的幅度。更具体地说，临界涨落的弛豫时间$\tau_R \sim \xi^z$。这里临界动力学指数$z > 0$(对于QCD临界点$z \approx 3$)，表明临界弛豫时间趋近于无穷。这种在临界点附近热平衡过程变慢的现象就叫critical slowing down效应。由于火球膨胀冷却和critical slowing down效应，在重离子对撞实验中，序参量的涨落最终在劫难逃地进入非平衡状态。建立定量描述临界涨落演化的理论框架是寻找临界点需要面对的一个重大挑战。

在BEST collabration成立之前，对于非平衡临界涨落已经有了一系列定性研究。比如文献[17]就发现，非平衡态和平衡态相比，涨落不仅会有定量差别，甚至在一些和观测量紧密相关的物理量上，有定性上的区别。比如三阶矩在非平衡态下的符号可以和平衡态下的期待值相反。

QCD临界涨落演化的主要定性特征可以通过

非平衡态动力学中的Kibble-Zurek机制来描述。如图3所示，考虑由重离子对撞实验产生的火球，其演化对于相图上一条经过临界点附近的轨迹。随着火球靠近临界点，平衡态不断增长，与此同时，达到平衡态所需的时间也在增长，因此，系统实际的涨落最终将无法跟上平衡态的增长，停滞在相图上某个靠近临界点的位置，比如图中的O点。因此，系统的实际涨落，不是平衡态的值，而是O点附近的值，反映了系统对O点的记忆。这个效应有时候也被称作记忆效应(memory effect)。

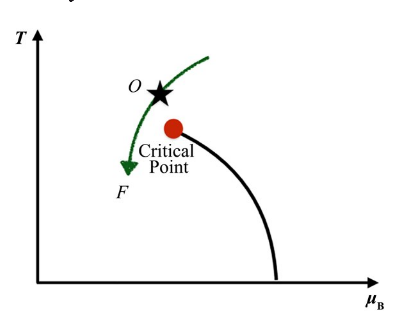


图3　重离子碰撞实验产生的火球在临界点(红色点)附近的轨迹示意[2]

Fig.3　Illustration of the non-equilibrium effect near the QCD critical point[2]

BEST合作组的研究极大推动了对临界涨落的定量描述。从理论上说，描述非平衡态临界涨落的基本框架是涨落流体力学。通常的流体力学把一个多体系统分成很多子系统(子系统有时也被称作流体cell)，描述每个cell的平均能动量，以及守恒荷的时间演化，空间分布。由于每个流体cell都可以和周围的cell发生能动量和粒子交换，因此，可以看作一个巨正则系综发生涨落。涨落流体力学的目标就是在描述平均能动量以及守恒荷变化之外，进一步描述其涨落的演化。如果对涨落流体力学输入临界点的相关信息，包括临界点的状态方程，就可以描述临界[18]点附近的动力学演化。

传统上描述涨落流体力学的方法是“随机方法”(stochastic approach)，即Landau-Lifshitz提出的办法。其要点是在原有流体力学方程中加入“噪音项”，噪音的幅度大小可以通过涨落-耗散定理与输运系数的大小联系起来。最近几年，一个新的方法被引入到相对论涨落流体力学中，本文将其称为“决定论方法”(deterministic appraoch)[18]。其主要思想是引入一系列描述涨落的关联函数，它们和通常的流体力学自由度耦合在一起，满足特定的“deterministic”方程。研究表明，该方法成功描述一系列重要的非平衡态效应。该方法的优点在于对计算资源的要求远低于随机方法，因为后者需要极高的数值统计量。但是其挑战在于描述高阶涨落时，其对应的方程形式较复杂。

下面将介绍HYDRO+理论[19]，它是“决定论方法”在临界点附近的具体应用。为了描述序参量M的长波长涨落δM，HYDRO+考虑了如下的Wigner函数：

$$\varphi_Q(t,\vec{x}) = \int_{\vec{y}} \mathrm{e}^{-i\vec{y}\vec{Q}} < \delta M(t,\vec{x}-\vec{y}/2)\delta M(t,\vec{x}+\vec{y}/2) > \tag{2}$$

式中：$\varphi_Q(t,\vec{x})$描述在时间t、位置$\vec{x}$上，高斯涨落在尺度$1/Q$下的强度，是HYDRO+的重要自由度。在HYDRO+中，$\varphi_Q(t,\vec{x})$满足一个特定的驰援方程，该方程和标准的能动量守恒方程和重子荷守恒方程一起，构成了HYDRO+方程。

需要强调的是，涨落和流体力学自由度是耦合在一起的。其耦合方式主要体现在：压强不再只是能量密度和守恒荷密度的函数，它还依赖于涨落$\varphi_Q(t,\vec{x})$。这是因为热力学函数，如压强，在临界点附近具有临界度规特征(Critical scaling)。这些特征源自序参量的涨落。因此，涨落的非平衡态演化也会反作用于热力学函数，所以在HYDRO+中，压强也是$\varphi_Q(t,\vec{x})$的泛函，其具体形式可以通过统计场论的方法系统推导，详见文献[6]。此外，文献[20−21]报道了将Hydro+框架拓展到可以描述非高斯涨落的相关进展。

2　模型

2.1　初始条件

如前所述，和LHC以及RHIC最高对撞能量相比，BES能量下火球初始状态会呈现一系列新的特征。对于前者，两个重离子核相互穿过的时间(Passing time)是0.15 fm或者更短，而且，对于中间快度区(快度$|y|<1$)，近似满足longitudinal boost invariance。这些特征在BES能量下并不成立。对于该能区的对撞，穿过时间可以长达几个费米。如能量密度等物理量对快度更加敏感，使得longitudinal boost invariance不再是一个很好的近似。由此可见，BES能区的初始条件模型构建复杂度较高。

BEST合作组成员在初始条件模型方面一个重要工作是发展了“动态初始化”方法[22]。如前所述，在BES能区，对撞离子穿过时间可以长达几个费米。意味着在对撞的两个核在相互穿过之前，火球中已经有一部分趋于热化，可以被流体力学描述。“动态初始化”方法将没有热化部分的贡献看作源

(source)，对已经热化部分求解含源的流体力学方程。文献[9]将该方法得到的初始条件输入到流体力学的模拟中，并与已有的数据进行了比较，包括质子数对快度的依赖。这些研究验证了"动态初始化"方法是一个在唯象上较为成功的模型。

由于初始状态重子密度空间分布的演化会对末态质子涨落产生贡献。从寻找临界点的角度看，这些贡献与临界点无关，是需要扣除的本底。因此，现有初始化模型需要进一步完善对初态涨落的定量描述。

2.2 包含了临界点的状态方程

状态方程是流体力学的重要输入，因此，为了求解临界点附近的流体力学方程，首先需要构建包含临界点的状态方程。QCD临界点被认为和3D Ising模型属于同一个universality class。因此，构建状态方程需要满足两个重要约束：1)在临界点附近和3D Ising模型具有可以一一对应的临界属性；2)在小重子密度区和格点的结果一致。此外，状态方程在其适用的相图范围，需要满足热力学稳定性和因果律(声速低于光速)等限制。显然，即便加上这些限制，构建状态方程的方法也不唯一。BEST合作组构造的状态方程发表于文献[23]中。由于QCD临界点和3D Ising模型之间的映射依赖于几个非普适性的参数，因此，BEST状态方程也依赖于这些参数。具体而言，它们包括临界点的位置(T_c, μ_c)，Ising模型相图上的温度轴和磁场轴映射到QCD相图之后和QCD相图的温度，化学势轴的夹角α_1、α_2，以及参数(w, ρ)控制临界区域在温度、密度方向的范围，这些参数刻画了QCD临界点的特征。通过实验和以BEST状态方程为输入的动力学模拟计算比较，有可能限制甚至确定这些参数。

对于寻找临界点，BEST状态方程的应用较为广泛。首先，它可以作为求解流体力学的输入；其次，它可以用来研究平衡态条件下，临界涨落对于重子化学势的依赖。比如文献[24]分析了重子密度四阶涨落，发现如果只考虑临界普世性的效应，四阶涨落会随着化学势增长先下降，再上升到峰值。但是如果考虑了非普世的贡献，下降的行为有可能会消失，只有上升到峰值的表现不会变化。

需要补充的是，求解流体力学还需要输入输运系数，包括黏滞系数、弥散常数。这些系数很难通过格点计算提取，此外输运系数也有特定的临界表现。参数化输运系数在BES能区的表现，并包含正确的临界行为，这是一个需要完善的工作。

2.3 流体力学演化

BEST合作组发展开发了两套独立的三维流体力学求解代码：1)将麦吉尔大学研究组原有的MUSIC代码拓展到了BES能区(以下简称MUSIC)；2)俄亥俄州立大学研究组开发的BESHydro代码[25](在BEST之外，CCNU的研究组最近开发了能在GPU上并行的代码CLVIS[26])。文献[12]报道了这两个不同代码之间的相互验证。

在输入了初始条件、状态方程和输运系数之后，流体力学可以给出对撞产生的火球在相图的轨迹，定量地回答了重离子对撞实验扫描了相图的哪些区域。图4展示了19.6 GeV下三个有代表性的空间快度所对应的轨迹。值得注意的是，当快度从中心区域$|\eta_s| < 0.5$变化到较大值时$0.5 < \eta_s < 1.5$，对应的重子密度变化率50~100 MeV。这意味着可以把扫描快度作为扫描相图的补充手段。

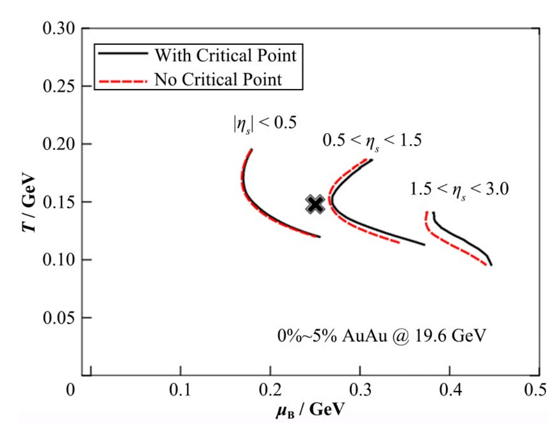


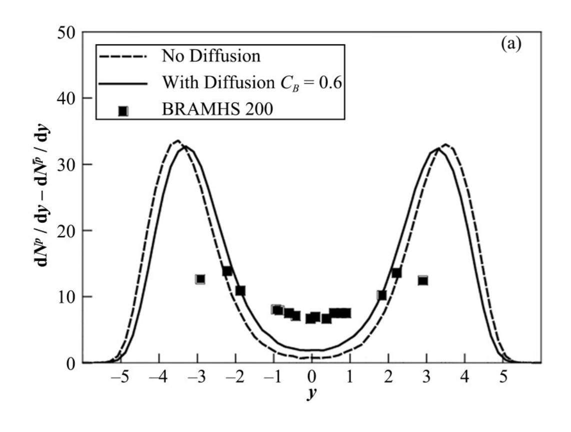
图4 通过求解流体力学得到的火球在不同中心快度η_s在相图上所对应的轨迹[1]

Fig.4 Trajectories on the QCD phase diagram from hydrodynamic simulations for BESII[1]

基于包括了临界点的状态方程和流体力学，文献[1]进一步分析了临界点对火球轨迹的影响。图4中实线、虚线分别表示状态方程中包含了和没有包含临界点时对应的轨迹。从中不难发现，临界点对火球轨迹的影响并不显著。进一步计算还发现，末态粒子的分布也没有受到临界点的显著影响。这说明涨落观察量，而不是粒子分布，对临界点更敏感。

对于有限密度的QCD物质，重子密度演化是流体力学演化的重要组成部分。重子密度弥散这一重要的物理过程被输运系数重子弥散常数控制。文献[27]研究了末态质子数分布对重子弥散常数的依赖关系。从物理上说，弥散过程会使末态分布和初始重子数分布不同，因此，有可能通过实验提取弥散常数。如图5所示，质子数在快度空间的分布确实对

弥散常数有一定的敏感性，实线和虚线分别对应重子弥散常数为零和不为零的结果。但是，由于现在对初态重子数分布的认知有限，因此，在现阶段，直接基于流体力学模型提取该弥散常数还有很大的不确定度，但这是一个值得努力的方向。在临界点附近，弥散常数会随着关联长度的增长而被压低。文献研究了其在唯象上对观测量的影响，结论是：由于重离子对撞实验的多重复杂因素，观测量对弥散常数的临界行为敏感度非常有限。



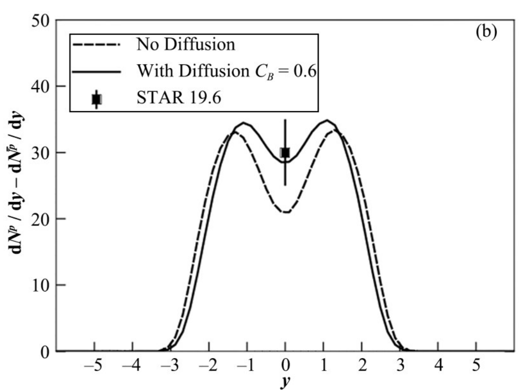


图5 质子数随动量空间快度y的分布[22]

Fig.5 Proton multiplicity as a function of momentum rapidity[22]

2.4 临界涨落的演化

§2.3讨论了没有考虑涨落的流体力学演化，本节介绍临界涨落演化的进展。

基于Hydro+框架，文献[29−30]研究了在简化的类似重离子对撞实验的条件下，考察了非平衡态高斯涨落$\varphi_Q(t,\vec{x})$（定义见§2）的演化，获得了如下有价值的信息。

首先，这些工作验证了平衡态涨落和非平衡态涨落的演化是不一样的。图6中，不同颜色的曲线对应不同的时间点，平衡态和非平衡态涨落分别由实线和虚线画出。如图6所示，在系统开始靠近临界点的时候，非平衡态涨落（实线）努力追赶不断增长的平衡态涨落（虚线），但被critical slowing down效应压低。当系统开始远离临界点时，平衡态涨落会衰减，但是非平衡态涨落衰减较慢，能够保存部分关于临界点的“记忆”，参看前文。这也说明，我们需要通过分析非平衡态涨落，提取临界信号。

其次，守恒律对非平衡态演化有非常重要的作用。由于重子密度是守恒的，因此长波长（小Q）的重子数涨落会变化得很缓慢。如图6所示，对于很小的Q，涨落并不因为临界点的存在而改变。

第三点，非平衡态涨落对流体力学演化反作用的影响可以忽略。这里反作用是指在涨落处在非平衡态条件下，流体力学自由度，如能量密度，流速度，它们的演化会发生怎样的改变。文献[7−8]的结果发现，涨落演化对能量密度，流速度的影响最大不超过0.1%这个量级。对于这个结果，一个直观的解释是：广延性热力学函数的大小正比于系统自由度的

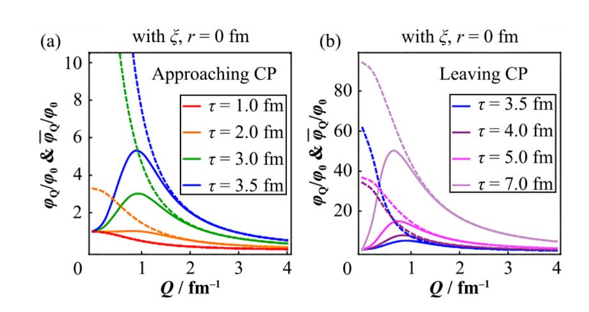


图6 高斯临界涨落在火球中心$r = 0$随矢量动量Q的变化[17]

(a) 系统靠近临界点，(b) 系统远离临界点

Fig.6 Non-equilibrium evolution of the critical non-Gaussian fluctuations[17]

(a) Near the critical point, (b) Away from the critical point

密度。虽然序参量涨落这一个自由度的贡献在临界点附近会被加强，但是QCD物质还存在大量和胶子，夸克相关的自由度，后者压低了序参量涨落的反作用。因此对于寻找QCD临界点的模型计算，可以先忽略这些反作用。

如前所述，基于“deterministic方法”的HYDRO+不是研究涨落演化的唯一方法。BEST合作组在基于“随机方法”的研究上，也取得了一系列进展。在降低了维度和其他简化条件下，文献[31]通过求解包含临界点的随机流体力学方程，计算了高斯和非高斯涨落的演化，结果表明：该方法也可以系统描述临界点附近的critical slowing down现象。

2.5 粒子化（particlization）

将流体力学的结果和实验观察量联系起来的关键步骤是粒子化（particlization）。它的目标是将能

量密度，重子密度以及流速度（fluid velocity）的时空分布，以及它们的涨落，和实验可以测量的强子产额，动量空间的分布以及相应的涨落，定量地关联起来。因此，对临界涨落进行合理的粒子化，是寻找临界点必须解决，又充满挑战性的问题。

从信息论的角度而言，粒子化问题的难度在于粒子动量空间分布函数包含了比流体力学解更多的信息。更具体地说，对分布函数f进行积分可以得到能动量以及守恒荷，因此，后者是对分布函数是一种限制。但是有无穷多的f可以满足这些限制，因此，唯一确定分布函数，需要额外地输入或者假设。在不考虑涨落的条件，被广泛使用的Copper-Frye粒子化方案假设了分布函数是热平衡态分布。那么通过能量、守恒荷确定相应的温度、化学势，对应的分布函数也就可以确定下来。但是这个方法显然不能直接推广到了粒子化处在非平衡状态下的临界涨落。

文献[32]假设强子分布的涨落是源于序参量场的涨落，后者由于和强子场耦合，引发强子质量的涨落，进而带来粒子数分布的涨落。在这样的假设下，文献[19]将Hydro+模拟的结果转化成粒子数（如质子数）的高斯涨落。这个方法也可以相对直接地推广到高阶（非高斯）涨落。其缺点在于对于粒子数涨落和序参量涨落的微观原因，有一个较强的假设，该假设还没有办法被验证。与此平行，文献[33]拓展了“局域守恒”假设，发展了不同的粒子化涨落方法。最近，文献[34]基于信息论，提出了新的解决方法，有一定启发性。粒子化临界涨落，依然是一个开放性的问题。

2.6 其他进展

这里将简述BEST合作组一些其他相关进展。

临界点以及一级相变点存在不仅会影响火球在流体力学阶段，也会影响其在强子气体态阶段的演化。此前描述后者的输运模型并没有考虑临界效应。文献的作者通过引入平均场，发展了高密区核物质状态方程模型（Vector Density Functional，VDF）模型。该模型的优点是可以直接和强子输运的模拟代码SMASH融合。文献[15]的研究还表明，强子气体阶段的临界效应也潜在对观测量有影响。关于输运模型的近期进展，可以参考文献[36]。

此外，BEST合作成员还以提取有限密度强相互作用物质密度和临界点信息为目标，开发相应的全局贝叶斯分析程序。由于模型参数的增加，实现这些目标的所需计算资源比此前对高能的重离子碰撞试验结果进行分析所需的资源可能高一到两个数量级。

3 总结与展望

从重离子对撞实验中提取有限密度区强相互物质的属性，包括寻找其可能存在的相边界和临界点，需要构建一个复杂的，可以描述火球演化的动力学框架。BEST合作组的工作，对这个框架中最重要的几个部件的构建，都起到不可或缺的贡献。它们包括：

1）一个复杂但可以在数值上实现的，包含了重子stopping和有限passing time的初始状态模型。

2）将此前已有的相对论流体力学模型推广到BES对撞能量，并可以用于模拟包括重子荷，奇异荷在内的守恒荷演化。

3）构建了包含临界点的状态方程，作为流体力学模型的输入。

4）发展了可以演化临界涨落的相对论涨落流体力学理论，包括HYDRO+理论，并初步应用于数值模拟中。

5）探索了粒子化临界涨落的方法，为定量描述实验观察量打下基础。

上述这些“部件”，已经被世界各地的研究者广泛应用到了相关研究中去。对于RHIC能量扫描相关物理的研究，正在进入从定性到定量的阶段。

展望未来，世界的主要科技强国，包括德国、俄罗斯和中国，正在计划或筹备在大型科学装置上的重离子对撞实验。这些实验的主要目标就是进一步研究中高密度区的QCD相图。其中低温高密核物质谱仪（CSR-External-target Experiment，CEE）于2019年获基金委国家重大科研仪器研制项目资助。CEE将是我国第一台运行于GeV能区的、自主研制的、基于HIRFL-CSR和HIAF[37]的大型核物理实验装置。CEE实验对寻找一级相变的信号，以及确定QCD临界点在特定重子密度区是否存在，有着极其重要的意义。这些实验，按照设计，可以探测比RHIC-BES实验重子密度更高的区域，也将对动力学模型的构建提出新的要求和挑战。一方面，BEST合作组取得的结果，可以作为未来这些研究的起点；另一方面，一些BEST合作组没有解决的难题，需要在未来被解决，它们包括：如何描述一级相变区域的流体力学以及相关涨落的演化；如何将现有框架的适用范围推广到更低的对撞能量（比如5 GeV）以下。对于这些碰撞，处在流体力学可以适用的阶段相对较短，因此呼唤新一代动力学模型的产生和发展。

作者贡献声明 本文唯一作者尹伊完成该文的撰写。

参考文献

1 Luo X F, Wang Q, Xu N, *et al*. Properties of QCD matter at high baryon density[M]. Published by Springer, 2022.

2 An X, Bluhm M, Du L, *et al*. The BEST framework for the search for the QCD critical point and the chiral magnetic effect[J]. Nuclear Physics A, 2022, **1017**: 122343.

3 Wu S J, Shen C, Song H C. Dynamically exploring the QCD matter at finite temperatures and densities: a short review[J]. Chinese Physics Letters, 2021, **38**(8): 28 – 36.

4 Shen C, Yan L. Recent development of hydrodynamic modeling in heavy-ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2020, **31**(12): 122. DOI: 10.1007/s41365-020-00829-z.

5 Hattori K, Huang X G. Novel quantum phenomena induced by strong magnetic fields in heavy-ion collisions [J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(2): 26. DOI: 10.1007/s41365-016-0178-3.

6 Wang F Q, Zhao J. Search for the chiral magnetic effect in heavy ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2018, **29**(12): 179. DOI: 10.1007/s41365-018-0520-z.

7 Gao J H, Ma G L, Pu S, *et al*. Recent developments in chiral and spin polarization effects in heavy-ion collisions [J]. Nuclear Science and Techniques, 2020, **31**(9): 90. DOI: 10.1007/s41365-020-00801-x.

8 Ma Y G. New type of double-slit interference experiment at Fermi scale[J]. Nuclear Science and Techniques, 2023, **34**(1): 16. DOI: 10.1007/s41365-023-01167-6.

9 Wang X N. Vector meson spin alignment by the strong force field[J]. Nuclear Science and Techniques, 2023, **34** (1): 15. DOI: 10.1007/s41365-023-01166-7.

10 Bazavov A, Ding H T, Hegde P, *et al*. Chiral crossover in QCD at zero and non-zero chemical potentials[J]. Physical Letters B, 2019, **795**: 15 – 21.

11 Borsanyi S, Fodor Z, Guenther J N, *et al*. QCD crossover at finite chemical potential from lattice simulations[J]. Physical Review Letters, 2020, **125**(5): 052001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.052001.

12 Noronha Hostler J, Parotto P, Ratti C, *et al*. Lattice-based equation of state at finite baryon number, electric charge, and strangeness chemical potentials[J]. Physical Review C, 2019, **100**(6): 064910.

13 Luo X F, Xu N. Search for the QCD critical point with fluctuations of conserved quantities in relativistic heavy-ion collisions at RHIC: an overview[J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(8): 112. DOI: 10.1007/s41365-017-0257-0.

14 Zhu L L, Wang B, Wang M, *et al*. Energy and centrality dependence of light nuclei production in relativistic heavy-ion collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2022, **33**(4): 45. DOI: 10.1007/s41365-022-01028-8.

15 Sun K J, Chen L W, Ko C M, *et al*. Probing QCD critical fluctuations from light nuclei production in relativistic heavy-ion collisions[J]. Physics Letters B, 2017, **774**: 103 – 107. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.09.056.

16 Sun K J, Chen L W, Ko C M, *et al*. Light nuclei production as a probe of the QCD phase diagram[J]. Physics Letters B, 2018, **781**: 499 – 504.

17 Mukherjee S, Venugopalan R, Yin Y. Real-time evolution of non-Gaussian cumulants in the QCD critical regime[J]. Physical Review C, 2015, **92**(3): 034912. DOI: 10.1103/physrevc.92.034912.

18 Akamatsu Y, Mazeliauskas A, Teaney D. A kinetic regime of hydrodynamic fluctuations and long time tails for a Bjorken expansion[J]. Physical Review C, 2017, **95**(1): 014909.

19 Stephanov M, Yin Y. Hydrodynamics with parametric slowing down and fluctuations near the critical point[J]. Physical Review D, 2018, **98**(3): 036006. DOI: 10.1103/physrevd.98.036006.

20 An X, Başar G, Stephanov M, *et al*. Evolution of non-Gaussian hydrodynamic fluctuations[J]. Physical Review Letters, 2021, **127**(7): 072301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.072301.

21 Sogabe N, Yin Y. Off-equilibrium non-Gaussian fluctuations near the QCD critical point: an effective field theory perspective[J]. Journal of High Energy Physics, 2022, **2022**(3): 124. DOI: 10.1007/JHEP03(2022)124.

22 Shen C, Schenke B. Dynamical initial-state model for relativistic heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2018, **97**(2): 024907. DOI: 10.1103/physrevc.97.024907.

23 Parotto P, Bluhm M, Mroczek D, *et al*. QCD equation of state matched to lattice data and exhibiting a critical point singularity[J]. Physical Review C, 2020, **101**(3): 034901. DOI: 10.1103/physrevc.101.034901.

24 Mroczek D, Nava Acuna A R, Noronha-Hostler J, *et al*. Quartic cumulant of baryon number in the presence of a QCD critical point[J]. Physical Review C, 2021, **103**(3): 034901. DOI: 10.1103/physrevc.103.034901.

25 Du L P, Heinz U. (3+1) -dimensional dissipative

relativistic fluid dynamics at non-zero net baryon density [J]. Computer Physics Communications, 2020, **251**: 107090. DOI: 10.1016/j.cpc.2019.107090.

26 Wu X Y, Qin G Y, Pang L G, *et al*. (3+1) -D viscous hydrodynamics at finite net baryon density: identified particle spectra, anisotropic flows, and flow fluctuations across energies relevant to the beam-energy scan at RHIC [J]. Physical Review C, 2022, **105**(3): 034909. DOI: 10.1103/physrevc.105.034909.

27 Denicol G S, Gale C, Jeon S, *et al*. Net baryon diffusion in fluid dynamic simulations of relativistic heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2018, **98**(3): 034916.

28 Du L P, An X, Heinz U. Baryon transport and the QCD critical point[J]. Physical Review C, 2021, **104**(6): 064904. DOI: 10.1103/physrevc.104.064904.

29 Rajagopal K, Ridgway G W, Weller R, *et al*. Understanding the out-of-equilibrium dynamics near a critical point in the QCD phase diagram[J]. Physical Review D, 2020, **102**(9): 094025. DOI: 10.1103/physrevd.102.094025.

30 Du L P, Heinz U, Rajagopal K, *et al*. Fluctuation dynamics near the QCD critical point[J]. Physical Review C, 2020, **102**(5): 054911. DOI: 10.1103/physrevc. 102.054911.

31 Nahrgang M, Bluhm M, Schaefer T, *et al*. Diffusive dynamics of critical fluctuations near the QCD critical point[J]. Physical Review D, 2019, **99**(11): 116015.

32 Pradeep M, Rajagopal K, Stephanov M, *et al*. Freezing out fluctuations in Hydro+ near the QCD critical point[J]. Physical Review D, 2022, **106**(3): 036017. DOI: 10.1103/physrevd.106.036017.

33 Oliinychenko D, Koch V. Microcanonical particlization with local conservation laws[J]. Physical Review Letters, 2019, **123**(18): 182302. DOI: 10.1103/physrevlett. 123.182302.

34 Pradeep M S, Stephanov M. Maximum entropy freezeout of hydrodynamic fluctuations[EB/OL]. 2022: arXiv: 2211.09142. https://arxiv.org/abs/2211.09142.

35 Sorensen A, Koch V. Phase transitions and critical behavior in hadronic transport with a relativistic density functional equation of state[J]. Physical Review C, 2021, **104**(3): 034904. DOI: 10.1103/physrevc.104.034904.

36 Lin Z W, Zheng L. Further developments of a multi-phase transport model for relativistic nuclear collisions[J]. Nuclear Science and Techniques, 2021, **32**(10): 113. DOI: 10.1007/s41365-021-00944-5.

37 Tang M T, Mao L J, Lu H J, *et al*. Design of an efficient collector for the HIAF electron cooling system[J]. Nuclear Science and Techniques, 2021, **32**(10): 116. DOI: 10.1007/s41365-021-00949-0.